Szállítási feladat

Dr. Kövér György

Bevezet

A lineáris programozás programozás matematikai modellje számtalan speciális feladat megoldására alkalmazható.
Speciálisan megfogalmazott feladatok közé sorolhatjuk az úgynevezett szállítási feladatot. A szállítási feladat az alapeseten túl változatos módon bvíthet, további követelményekkel kiegészíthet.

A szállítási feladat alapesetének megértéséhez tekintsünk egy termel vállalatot, amely három telephelyen, más-más földrajzi helyen található gyártó kapacitással rendelkezik. A három üzemben azonos minségben állít el olyan terméket melyre négy felvev helynek is szüksége van. A négy felvev hely más forrásból nem tudja az igényét kielégíteni.
A három telephely adott idegység alatt 45 t, 50 t és 65 t gyártókapacitással rendelkezik. A felvev helyek (fogyasztók) igénye ezen idszak alatt azonosan 40 tonna.

Célunk az, hogy meghatározzuk honnan, hová, mennyi árut szállítsunk, hogy a szállítási összköltség a lehet legkisebb legyen. A szállítás megtervezése során a szállítási költségeket természetesen figyelembe kell venni. A vállalat a szállítási költségek összegét olyan alacsonyan kívánja tartani, amennyire csak lehetséges.

A szállítási költségeket a következ táblázat jeleníti meg:

	F1	F2	F3	F4
T1	7	8	5	6
T2	3	2	1	9
T3	5	9	4	3

A költségtáblázatban található értékek azt jelentik, hogy egy egységnyi, példánkban egy tonna termék elszállítása az adott telephelyrl egy adott felvev helyre mennyibe kerül. Az adott érték a távolságot és a földrajzi adottságokat is figyelembe veszi. Példánkban egy tonna termék elszállítása a második telephelyrl a negyedik fogyasztóhoz 9 ezer forintba kerül.
A feladatnak azt a megoldását keressük, amely vállalati szinten a legkisebb szállítási összköltséget eredményezi, természetesen a fogyasztók igényeinek kielégítése mellett.

A szállítási feladat lineáris programozási matematikai modellje

A megadott számértékek szerint a telephelyek kapacitásösszege a felvev helyek összes igényével

megegyezik. Megjegyezhetjük, hogy ellenkez esetben a szállítási feladat átfogalmazható és visszavezethet erre az esetre, ahogy ezt a késbbiekben majd látni fogjuk.
A kapacitások és igények egyezségének a következménye, hogy a teljes gyártott mennyiség kiszállításra kerül, ezzel egyidejleg az igények teljes egészében kielégítésre kerülnek.
Ha x_{ij} (i=1, ..., 3, j=1, ..., 4) jelöli az i-edik feladótól a j-edik igénylnek szállított mennyiséget, akkor a feltételrendszer így néz ki:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=45$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=65$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=40$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=40$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=40$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=40$$

A célfüggvény pedig a teljes szállítási költséget fjezi ki, melyet minimalizálnunk kell.

$$z=7\,x_{11}+8\,x_{12}+5\,x_{13}+6\,x_{14}+3\,x_{21}+2\,x_{22}+x_{23}+9\,x_{24}+5\,x_{31}+9\,x_{32}+4\,x_{33}+3\,x_{34}\to \min$$

Az elz feltételeket és a célfüggvényt mátrixok és vektorok használatával a következ formában írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 50 \\ 65 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$z=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 9 & 5 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix}\rightarrow \min$$

A bevezet feladat konkrét megfogalmazásától és értékeitl az általánosítás irányába továbblépünk. Általában, ha m számú telephely, n számú fogyasztó szerepel a rendszerben, a költségmátrix egyes elemeit c_{ij} , a kapacitásokat t_i , a fogyasztói igényeket r_j jelöli, a akkor a bevezetett jelölésekkel a követez formában írhatjuk fel a szállítási feladatot:

1. $x_{ij} \geq 0, \; (i=1,..., m, \quad j=1,..., n)$, vagyis minden szállítási mvelet a telephelyek fell a fogyasztók irányába történik, nem szükséges, hogy minden telephelyrl minden fogyasztó számára történjen szállítás.

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = t_i \geq 0, \; (i=1,..., m)$, vagyis a telephelyek kapacitását teljes egészében kihasználva minden termék kiszállításra kerül a fogyasztókhoz.

3. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \geq 0, \; (j=1,..., n)$, vagyis a fogyasztók igényeit teljes egészében kielégítik a telephelyekrl történ szállítások.

4. $\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$, vagyis a telephelyek kapacitásainak összege pontosan megfelel a fogyasztói igények összegének. Ha konkrét feladat esetében nem állna fenn ez a feltétel, abban az esetben is átfogalmazható a feladat erre az esetre.

5. $z=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$, a célfüggvény, vagyis a teljes kiszállítási költség.

A szállítási feladat fenti megfogalmazása alapján nyilvánvaló, hogy lineáris programozási feladatról van szó.

A lineáris programozási feladat duálpárját is célszer rögtön felírni, mivel - ahogyan ezt a késbbiekben láthatjuk - a szállítási feladat megoldásának optimalitását erre alapozva ellenrizhetjük.

A duálfeladat

A duálfeladatot a szállítási feladat primálfeladata alapján írjuk fel.A duálváltozókat két csoportra bontjuk, a telephelyek (***u***) és fogyasztók(***v***) számának megfelelen. A duál feladat általános megfogalmazását megelzen a bevezt feladatunkon szemléltetjük a duálpár elllítását, majd levonjuk az általánosítható következtetéseket.

A módosított minimumfeladat duálpárjának felírási módja szerint kapjuk a szállítási feladathoz tartozó duálfeladatot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Megfigyelhet, hogy az együttható mátrix minden sorában pontosan két darab egyes található, az egyik egyes kiválaszt egy *u* változót, amely telephelynek felel meg, a másik egy *v* változót, amely egy fogyasztónak felel meg. A fenti egyenltlenségrendszer baloldalán tizenkét darab olyan összeg szerepel, melyben egy *u* és egy *v* változó található. Mind a három *u* változóó szerepel egy-egy összegben mind a négy *v* változóval. Az egyenltlenségek jobb oldalán a költségmátrix megfelel elemei találhatók.

A duálfeladatban szerepl egyenltlenségrendszert az együttható mátrix speciális volta miatt más alakban is megfogalmazhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{e}_j \end{bmatrix} \le c_{ij}\,, \quad (i = 1,\dots, m, j = 1,\dots, n)$$

$$z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} \rightarrow \max$$

$\boldsymbol{u}^T$, $\boldsymbol{v}^T$ eljele tetszleges, $\boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{e}_j$ a megfelel egységvektorok.

Tiltott viszonylatok

Szállítási feladatok esetében életszer az a megkötés, hogy bizonyos telephelyekrl nem lehetséges a szállítás egyes fogyasztókhoz. A tiltott viszonylatokat szállítási költségét elegenden nagyra választjuk. A költségminimalizálásra törekv algoritmusaink elkerülik a túlzottan magas költség viszonylatokat és a korábban tárgyalt alapesetre vezetjük vissza a tiltott viszonylatok esetét.
A következ példán szemléltetjük a tiltótarifát.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	4	2	7	M	30
T2	5	2	M	4	25
T3	4	8	3	1	40
Igény	15	15	40	25	95 = 95

A szállítási feladat eltér kapacitás összeg és igény összeg esetén

A szállítási feladat megoldását arra az esetre elegend kidolgozni amikor a kapacitások és az igények összege egymással egyenl. Ha a két érték eltér egymástól, akkor fiktív fogyasztási hely, vagy fiktív telephely bevezetésével visszavezetjük a feladatot az eddigiekben tárgyalt alapesetre.

A bevezet feladatunkban azonos volt a kapacitások és igények összege:

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	7	8	5	6	45
T2	3	2	1	9	50
T3	5	9	4	3	65
Igény	40	40	40	40	160 = 160

A feladat megoldása további elékészít lépést nem igényel. Akövetkez táblázatban megfogalmazott feladat ugyanakkor eltér igény és kapacitás összeggel rendelkezik. Az összesített igény 600, míg a kapacitás 400. A feladatnak természetesen csak olyan megoldását lehet megadni, amelyben egy, vagy több fogyasztó az általa igényeltnél kevesebb termékhez jut.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	2	1	0	5	100
T2	3	7	15	9	100
T3	14	0	2	6	200
Igény	150	150	150	150	600 <> 400

A hiányzó kapacitást fiktív telephellyel fedjük le, melynek a kapacitása épp az eltéréssel egyezik meg, amint a következ táblázatban ezt szemléltetjük. A fiktív telephely beveztésével az alapesetre vezettük vissza a feladatot. Mivel a fiktív telephelyrl való kiszállítás nem valóságos, fogyasztó termékhez nem jut, a 200 egységnyi termék nem is létezik, ezért a költségmátrix megfelel sorában zérus költségeket találunk.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	2	1	0	5	100
T2	3	7	15	9	100
T3	14	0	2	6	200
TF	0	0	0	0	200
Igény	150	150	150	150	600 = 600

A következ példánkban a fiktív fogyasztó bevezetését szemléltetjük.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	12	2	5	3	30
T2	6	4	9	6	40
T3	7	2	3	2	30
Igény	22	25	17	21	85 <> 100

A fogyasztói igények összege 100, a telephelyek kínálata együttesen 85. Olyan fiktív fogyasztó bevezetésével vezetjük vissza az alapesetre ezt a feladatot, melynek a igénye az eltéréssel egyezik meg. A fiktív fogyasztó által igényelt 15 (a mértékegységet mellzzük) egységnyi termék kiszállításra nem kerül, a telephelyeken marad, a megfelel viszonylatok szállítási költsége természetesen nulla.

	F1	F2	F3	F4	FF	Kapacitás
T1	12	2	5	3	0	30
T2	6	4	9	6	0	40
T3	7	2	3	2	0	30
Igény	22	25	17	21	15	100 = 100

A tiltott viszonylat fontos szerephez juthat olyan esetekben, amikor a kapacitásösszeg meghaladja a fogyasztói igények együttesét, de egy telephely a teljes kapacitásának megfelel mennyiséget valamely ok miatt teljes egészében ki kell hogy szállítsa. A gyakorlati ok lehet ilyen esetben például a httároló hiánya, vagy meghibásodása, stb.
Tegyük fel, hogy a második telephely nem rendelkezik ht tároló kapacitással. Minden terméket azonnal ki kell szállítania. A fiktív fogyasztó bevezetése után a megfelel viszonylat költségét elegenden nagyra választjuk (M). Ezzel elérjük, hogy a kapacitásfelesleg ne a második telephelyen jelentkezzen.

	F1	F2	F3	F4	F5	Kapacitás
T1	12	2	5	3	0	30
T2	6	4	9	6	M	40
T3	7	2	3	2	0	30
Igény	22	25	17	21	15	100 = 100

Hasonlóan járunk el akkor is, ha kapacitása hiány lép fel, de egy adott fogyasztó igényét feltétlenül ki kell elégíteni. Ekkor ennek a fogyasztónak a fiktív telephely szállítását sújtjuk tiltó tarifával.

A szállítási feladat megoldása disztribúciós módszerrel

A korábbiakban kiderült, hogy a szállítási feladat nem más, mint egy lineáris programozási feladat, a korábbi fogalmaink szerint módosított normál feladat. A megoldása a szimplex módszerrel lehetséges. Jegyezzük meg, hogy a szállítási feladat reprezentálására alkalmas lineáris programozási feladat mérete a kisebb gyakorlati esetekben is óriási. Ugyanakkor a feladat specialitásából származóan egyéb megoldási módszerek is kidolgozásra kerültek, melyek olcsóbban és gyorsabban vezetnek optimális, vagy szuboptimális megoldásra.

A szállítási feladat esetében is a szimplex módszerhez hasonlóan járunk el. Elállítunk egy lehetséges bázismegoldást, majd lépésrl lépésre javítjuk a megoldást újabb változóknak a bázisba vonásával, amíg az optimumot, vagyis a minimális szállítási költséget el nem érjük.
Mivel lineáris programozási feladatróól van szó, vegyük figyelembe az alternatív megoldások lehetségét. A szállítási feladatnak is lehetséges több, egymástól eltér, de azonos kiszállítási költség megoldása.

A szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldása

A megoldás megadja, hogy mely viszonylatokban mennyi terméket kell kiszállítani, mely telephelyrl mely fogyasztónak. A fogyasztók igényeit igyekszünk kielégíteni.
További bizonyítás nélkül fogadjuk el, hogy akkor találtuk meg egy szállítási feladat lehetséges bázismegoldását, ha n+m-1 számú viszonylatot választottunk ki úgy, hogy a fogyasztói igényeket kielégítettük, a kapacitásokat kihasználtuk. Amennyiben fiktív fogyasztót, telephelyet vezettünk be, akkor n+m viszonylatot kell megfelelen kiválasztanunk.

A többi viszonylaton szállítás nem történik, vagyis nulla mennyiséget szállítunk.
Jegyezzük meg, hogy amint a lineáris programozási feladatok megoldása során találkoztunk degenerációval, úgy ez itt is jelentkezhet. A pontosan n+m-1 (esetleg n+m) szállítási viszonylatot akkor is meg kell választanunk, ha nulla mennyiséget kell továbbítanunk. A szállítási viszonylatokat **kötött helyeknek** is nevezzük.

A szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldásának elállítása

Három a gyakorlatban is elterjedt módszert ismertetünk. Ismertetésük sorrendjében bonyolultságuk egyre fokozódik, egyre gyakrabban egyre inkább megközelítik az optimális megoldást. De a minimális költségnél jelentsen kedveztlenebb megoldást is szolgáltathatnak, hiszen csak azt garantálják, hogy lehetséges bázismegoldást állítanak el, azt nem, hogy az optimálisat.

A szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldásának elállítása:
„Északnyugati sarok” másképp „Bástya” módszer

Válasszuk a bevezet feladatunkat a módszer bemutatására. Állítsunk el egy lehetséges bázismegoldást. A megoldás során NEM törekszünk arra, hogy a megoldás a szállítási összköltséget valamely mértékben is minimalizálja. Célunk csupán egy egy lehetséges megoldás meghatározása, amely esetleg a legköltségesebb az összes közül.
Az eljárás során az els telephely kapacitását felhasználva megpróbáljuk az els fogyasztónak kiszállítani az igényelt mennyiséget. Ha marad felesleg, akkor azt a következ fogyasztónak szállítjuk. Ha a második fogyasztó igényét nem elégítettük ki, akkor a második telephelyrl azt pótoljuk, és így tovább.

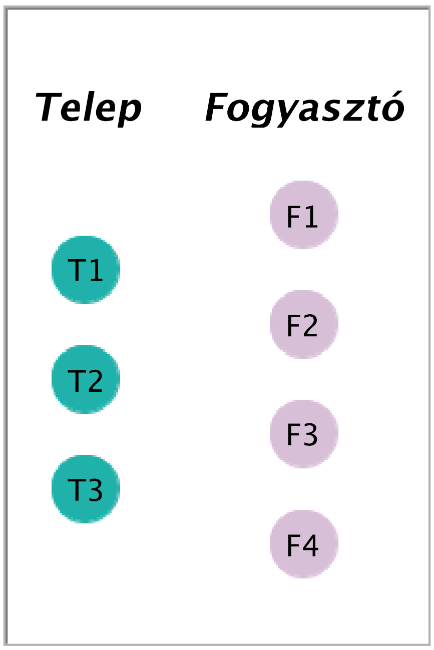
A megoldás elállítását lépésrl-lépésre szemléltetjük a következkben.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	7	8	5	6	45
T2	3	2	1	9	50
T3	5	9	4	3	65
Igény	40	40	40	40	160 = 160

A költségmátrix elemeit a megoldás elállítása során nem vesszük figyelembe. A telephelyek kapacitásait sorban felhasználjuk a fogyasztók igényeinek kielégítésére. A telephelyek fennmaradó kapacitását, a fogyasztók maradék igényeit és az összes szállítási költséget lépésrl-lépésre kiszámítjuk.

Az induló disztribúciós táblázatunk a következ:

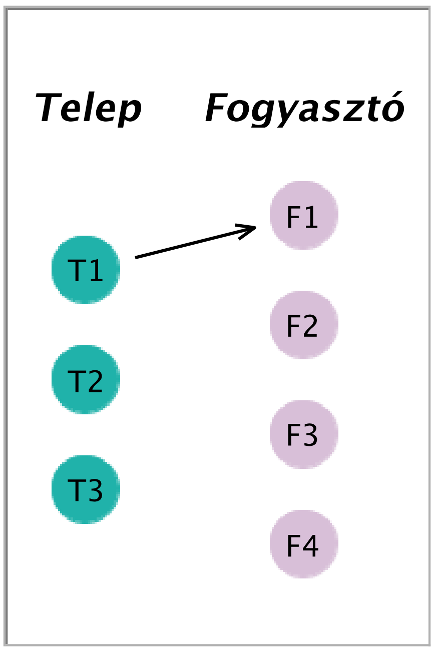
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	45	45
T2	3	2	1	9	50	50
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	0
Száll.	0	0	0	0		



Az els telephely (T1) kapacitásából teljes egészében kielégítjük az els fogyasztó (F1) igényét 40 egységnyi termékkel. T1-ben marad 5 egységnyi termék.

A szállítási összköltség: $z = 7 \cdot 40 = 280$.

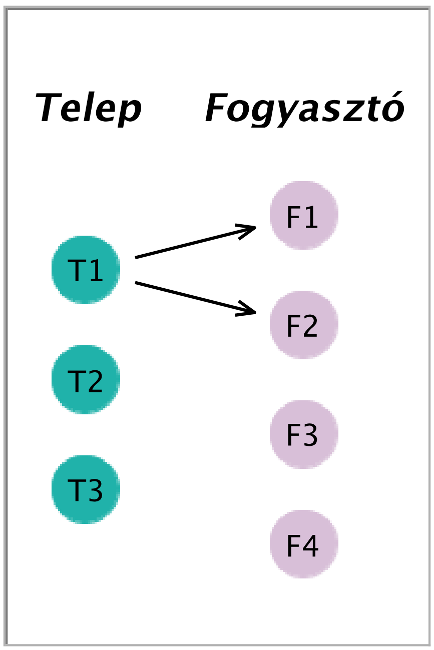
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	8	5	6	45	5
T2	3	2	1	9	50	50
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	280
Száll.	40	0	0	0		



Az els telephely (T1) maradék kapacitásából 5 egységnyi terméket szállítunk a második fogyasztónak (F2). Az els telephely kapacitását kimerítettük. A második fogyasztó további 35 egységnyi terméket igényel.

A szállítási összköltség: $z = 7 \cdot 40 + 8 \cdot 5 = 320$.

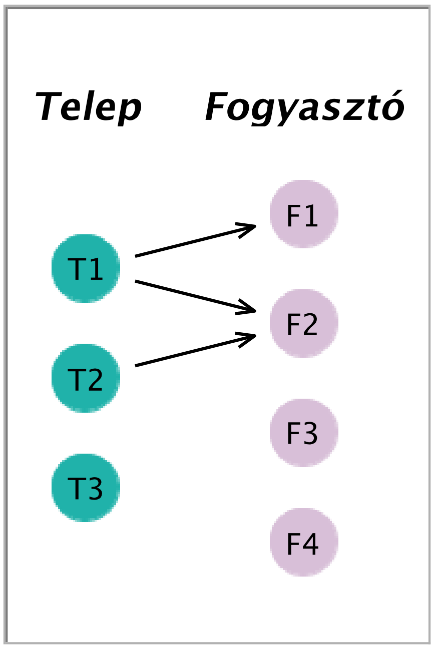
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	2	1	9	50	50
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	320
Száll.	40	5	0	0		



A második fogyasztónak (F2) az második telephelyrl (T2) szállítjuk ki a 35 egységnyi terméket, 15 egységnyi maradék keletkezik.

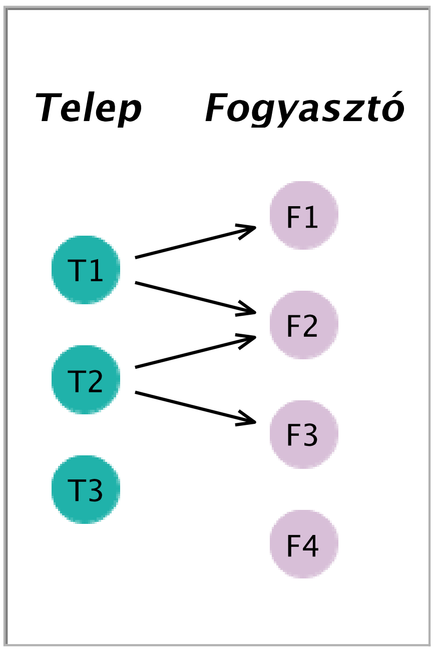
A szállítási összköltség: $z = 7 \cdot 40 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 35 = 390$.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	35 2	1	9	50	15
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	390
Száll.	40	40	0	0		

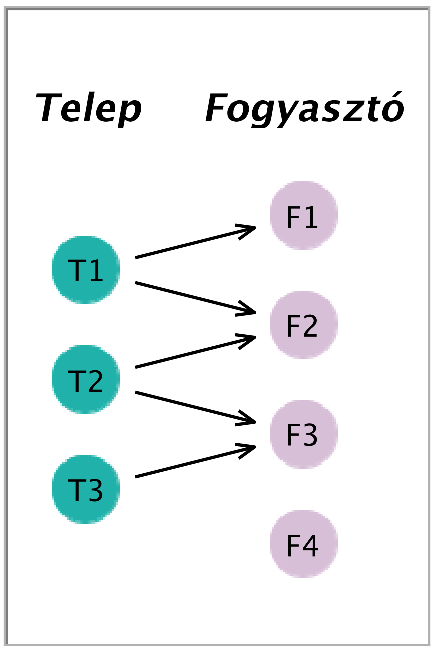


Az eddigiekhez hasonlóan hajtjuk végre a szállítási feladat lehetséges bázismegoldását elállító lépéseket.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	35 2	15 1	9	50	0
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	405
Száll.	40	40	15	0		



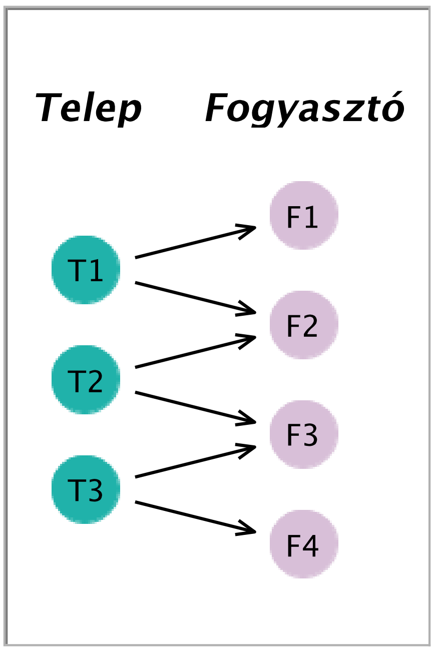
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	35 2	15 1	9	50	0
T3	5	9	25 4	3	65	40
Igény	40	40	40	40	Költség	505
Száll.	40	40	40	0		



Az "Északnyugati sarok" módszer által elállított lehetséges bázismegoldást láthatjuk a következ táblázatban.

A bázismegoldáshoz tartozó szállítási összköltség:
$z = 7 \cdot 40 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 35 + 1 \cdot 15 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 40 = 625.$

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	35 2	15 1	9	50	0
T3	5	9	25 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	625
Száll.	40	40	40	40		



A degerált eset

A lineáris programozási feladatnál korábban tapasztaltakhoz hasonlóan a degeneráció esete a szállítási feladat megoldása során is jelentkezhet. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a telephely kapacitása épp fedezi a fogyasztó igényét, nincs maradék kapacitás. A lehetséges bázismegoldást úgy állítjuk el ebben az esetben, hogy a telephely és a következ fogyasztó viszonylatában nulla mennyiség kiszállítását programozzuk. Ezt a nullát, mint a **kötött** helyek egyikét jelölnünk kell. Ezért használtuk korábban az *na=0* jelölést, hogy nulla mennyiség szállítását jelent kötött helyeket a 0 határozott kiírásával meg tudjuk különböztetni a nem kötött helyektl.

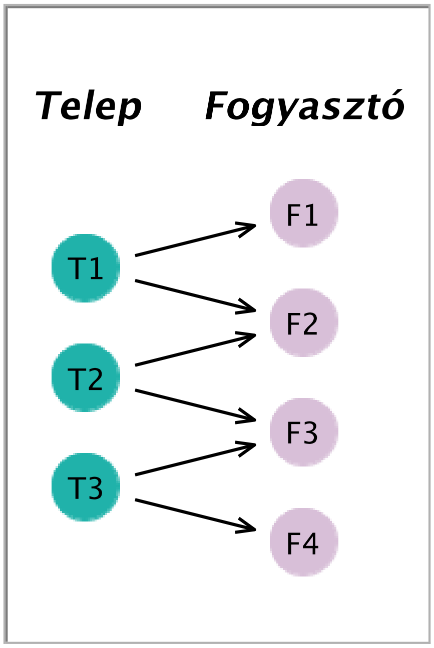
Lássunk példát a degenerációra, az elzleg megoldott feladat egy változatával.

Az eltérés annyi, hogy a második telephely (T2) kapacitása 35 egység, épp fedezi a második fogyasztó igényét.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	7	8	5	6	45
T2	3	2	1	9	35
T3	5	9	4	3	80
Igény	40	40	40	40	160 = 160

A lehetséges bázismegoldás elállítása során ügyelnünk kell arra, hogy a kötött helyek száma mindig $m + n - 1$ legyen. Ezt biztosítjuk degenerált esetben a 0 mennyiség programozásával.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	40 7	5 8	5	6	45	0
T2	3	35 2	0 1	9	35	0
T3	5	9	40 4	40 3	80	0
Igény	40	40	40	40	Költség	670
Száll.	40	40	40	40		



A szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldásának elállítása: Soronként, oszloponként a legkisebb költség helyek kiválasztása

A módszer bemutatására szintén a bevezet feladatunkat választjuk. A különböz módszerekkel meghatározott megoldások így összevethetvé válnak.

Az "Északnyugati sarok" módszer nem igyekezett a minimalizálni a szállítási összköltséget. Úgy tnik, hogy a legkézenfekvbb módja az összes szállítási költség csökkentésének, az ha figyelembe vesszük a viszonylatonkénti költségeket és a kisebb költség viszonylatokon igyekszünk szállítani, természetesen az igényeknek és a kapacitásoknak megfelelen a lehet legtöbbet.

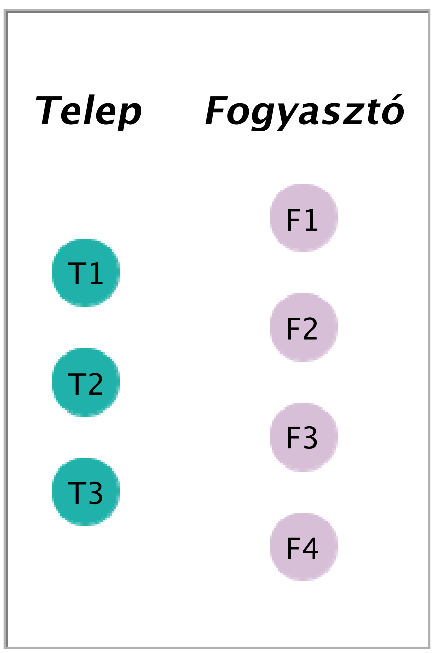
Állítsunk el egy lehetséges bázismegoldást a legkisebb költség helyek figyelembevételével. A megoldás során arra törekszünk arra, hogy a szállítási összköltséget, vagyis a célfüggvényt minimalizáljuk.
Az eljárás során azon a viszonylaton kezdjük a szállítás programozását, ahol az egységenkénti költség a legkisebb. Ha a telephely kapacitása nem elég a fogyasztónak, akkor a következ alacsony költség telephelyrl szállítjuk a maradékot. Ha a telephely kapacitása több, akkor a telephely sorában keressük a következ alacsony költség viszonylatot. Ezt az eljárást követve határozunk meg egy lehetséges bázismegoldást.

A bevezet feladatunk:

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	7	8	5	6	45
T2	3	2	1	9	50
T3	5	9	4	3	65
Igény	40	40	40	40	160 = 160

Az induló disztribúciós táblázatunk:

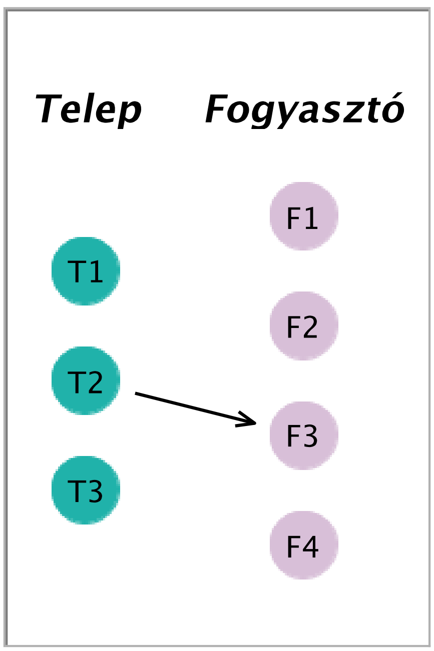
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	45	45
T2	3	2	1	9	50	50
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	0
Száll.	0	0	0	0		



A legkisebb költség viszonylat a T2->F3, egységenkénti költsége 1. A harmadik fogyasztó (F3) ignyét teljes egészében ki tudjuk elégíteni 40 egységnyi termékkel. T1-ben marad 10 egységnyi termék.

A szállítási összköltség: $z = 1 \cdot 40 = 40$.

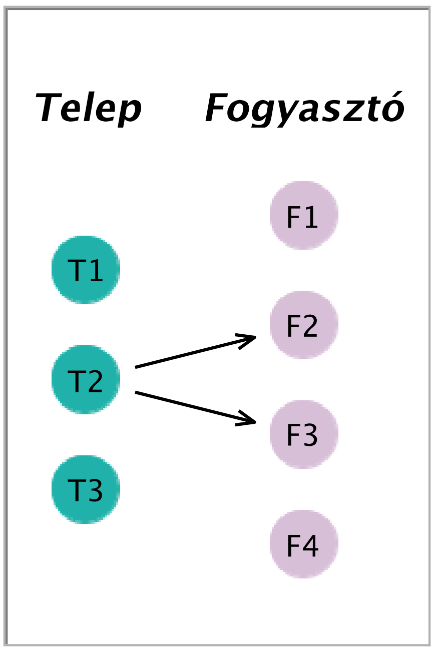
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	45	45
T2	3	2	40 1	9	50	10
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	40
Száll.	0	0	40	0		



A második telephely (T2) maradék kapacitásából 10 egységnyi terméket szállítunk a második fogyasztónak (F2). A második telephely kapacitását kimerítettük. A második fogyasztó további 30 egységnyi terméket igényel.

A szállítási összköltség: $z = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 10 = 60$.

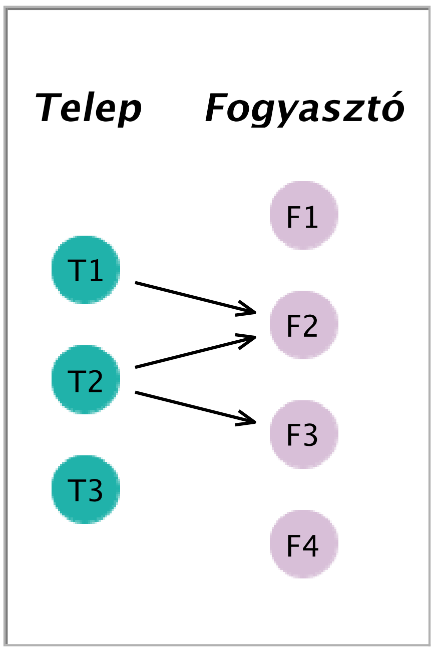
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	45	45
T2	3	2 [10]	1 [40]	9	50	0
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	60
Száll.	0	10	40	0		



A második fogyasztónak (F2) az els telephelyrl (T1) (8<9) szállítjuk ki a 30 egységnyi terméket, 15 egységnyi maradék keletkezik.

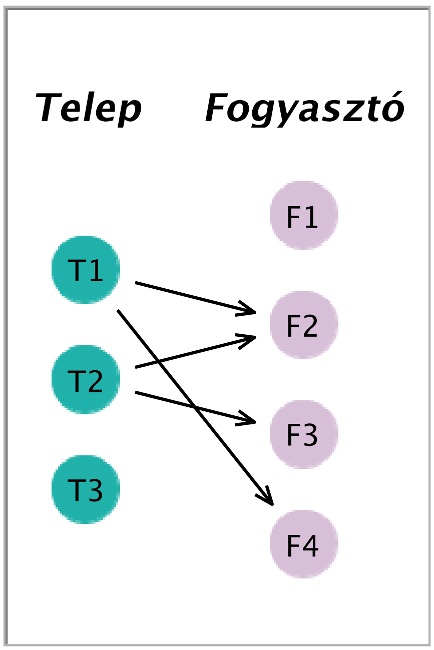
A szállítási összköltség: $z = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 30 = 390$.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	30 8	5	6	45	15
T2	3	10 2	40 1	9	50	0
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	300
Száll.	0	40	40	0		

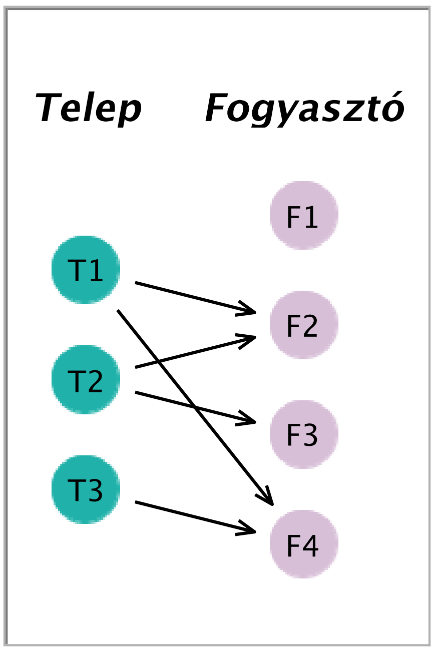


Az eddigiekhez hasonlóan hajtjuk végre a szállítási feladat lehetséges bázismegoldását elállító lépéseket.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	30 8	5	15 6	45	0
T2	3	10 2	40 1	9	50	0
T3	5	9	4	3	65	65
Igény	40	40	40	40	Költség	390
Száll.	0	40	40	15		



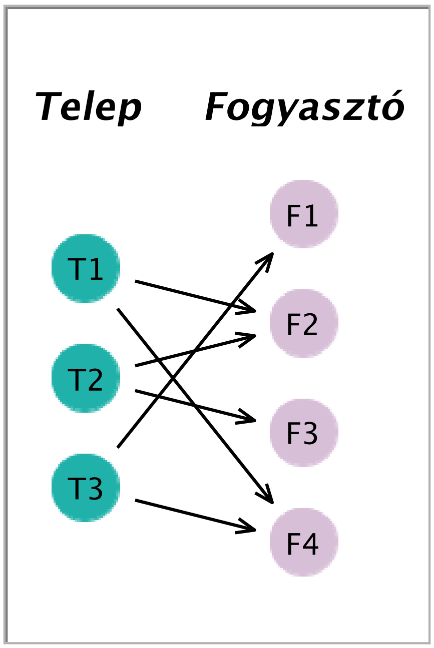
	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	30 8	5	15 6	45	0
T2	3	10 2	40 1	9	50	0
T3	5	9	4	25 3	65	40
Igény	40	40	40	40	Költség	465
Száll.	0	40	40	40		



A soronként, oszloponként legkisebb költség helyek kiválasztásával elállított lehetséges bázismegoldást láthatjuk a következ táblázatban.

A bázismegoldáshoz tartozó szállítási összköltség:
$z = 1\cdot 40 + 2\cdot 10 + 8\cdot 30 + 6\cdot 15 + 3\cdot 25 + 5\cdot 40 = 665$. Ez jóval magasabb, mint az "Északnyugati sarok" mdszer által szolgáltatott 625. A romló érték magyarázatát abban a szemellenzs "mohó" törekvésben találjuk meg, hogy minden esetben az adódó legkisebb költég viszonylatot választjuk a szállítás programozására. Ez teljesen félrevezet lehet, mint ez a példa is szemlélteti.

	F1	F2	F3	F4	Készlet	Maradék
T1	7	30 8	5	15 6	45	0
T2	3	10 2	40 1	9	50	0
T3	40 5	9	4	25 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	665
Száll.	40	40	40	40		



A szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldásának elállítása:
A Vogel-Korda féle módszer

A "Vogel-Korda" eljárás alapgondolata a soronként, oszloponként legkisebb költség helyek kiválasztására épül megoldás kedveztlen tulajdonságait próbálja kiküszöbölni. Soronként és oszloponként képezzük a két legkisebb költség adat különbségét. Annál a fogyasztónál, vagy telephelynél kezdjük a készletek kiszállítását, amely esetében a legolcsóbb és a második legolcsóbb viszonylat közötti árdifferencia a legmagasabb.

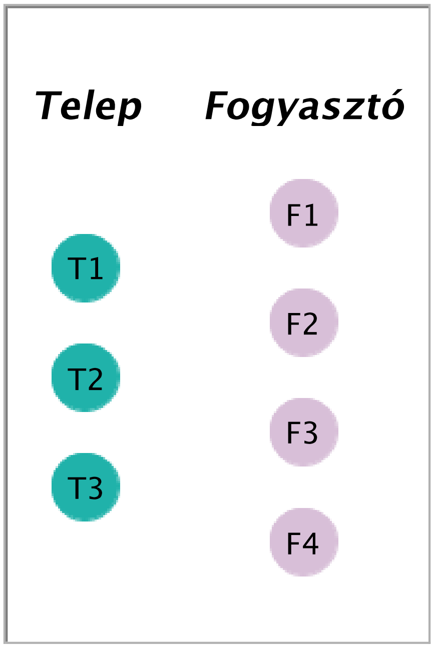
A módszer bemutatására szintén a bevezet feladatunkat választjuk. A különböz módszerekkel meghatározott megoldások így összevethetvé válnak.
Állítsunk el egy lehetséges bázismegoldást a Vogel-Korda módszerrel.A megoldás elállítását lépésrl-lépésre szemléltetjük a következkben.

	F1	F2	F3	F4	Kapacitás
T1	7	8	5	6	45
T2	3	2	1	9	50
T3	5	9	4	3	65
Igény	40	40	40	40	160 = 160

A költségmátrix elemeit a megoldás elállítása során természetesen figyelembe kell venni. Fogyasztónként és telephelyenként kiszámítjuk a legolcsóbb és a második legolcsóbb helyek közötti különbséget, ezt fel is tüntetjük a táblázatunkban a "Diff." felirat sorban/oszlopban.

Az induló disztribúciós táblázatunk:

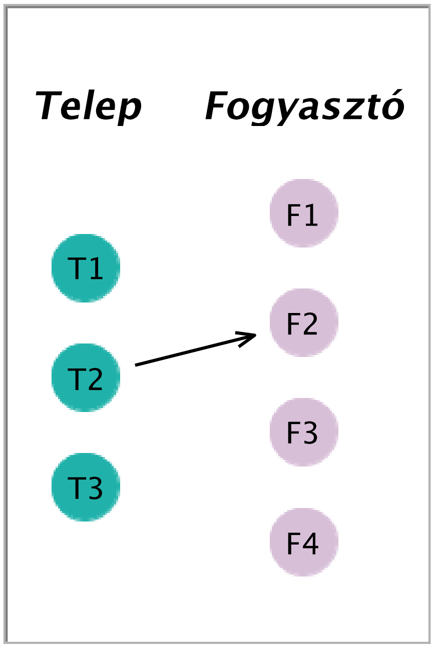
	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	1	45	45
T2	3	2	1	9	1	50	50
T3	5	9	4	3	1	65	65
Diff	2	6	3	3			
Igény	40	40	40	40		Költség	0
Száll.	0	0	0	0			



Láthatjuk, hogy preferálnunk kell a szállítási program készítése során a második fogyasztót. Az els lépésben az igényeit kell kielégíteni a második telephelyrl. Ha ezt csak egy késbbi fázisban tennénk, akkor a második telephely kapacitása már kötött lehetne.
A szállítási összköltség: $z = 2 \cdot 40 = 80$.

A második fogyasztóhoz a szükséges mennyiséget kiszállítva a költségek közötti differenciát ismételten meg kell határozni mieltt a szállítási terv második kötött helyét megválasztanánk. A második fogyasztó már nem vesz részt a számításban.

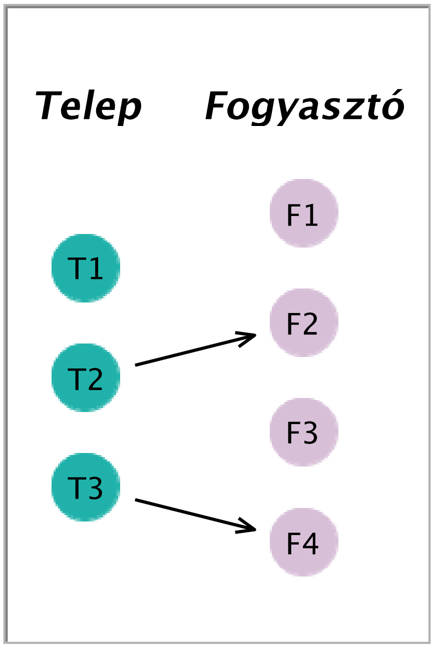
	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	1	45	45
T2	3	2 (40)	1	9	2	50	10
T3	5	9	4	3	1	65	65
Diff	2	-	3	3			
Igény	40	40	40	40		Költség	80
Száll.	0	40	0	0			



A harmadik és a negyedik fogyasztó esetében a költségdifferencia egyaránt három. Válasszuk a negyediket a kötött hely meghatározásához, ott kisebb a költség (3).
A szállítási összköltség: $z = 2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 = 200$.

A differenciák ismételt meghatározása után döntünk a harmadik kötött helyrl.

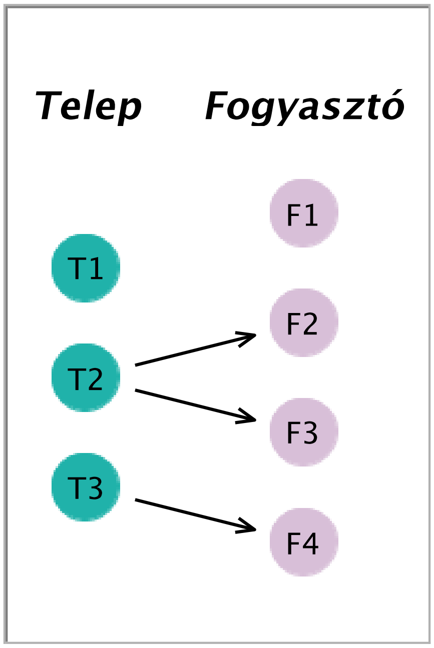
	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	2	45	45
T2	3	40 2	1	9	2	50	10
T3	5	9	4	40 3	1	65	25
Diff	2	-	3	-			
Igény	40	40	40	40		Költség	200
Száll.	0	40	0	40			



A harmadik fogyasztó bevonása következik, az igényét a második telephelyrl részben kielégítjük, majd ismételten meghatározzuk a differenciákat.

A szállítási összköltség: $z = 2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 210$.

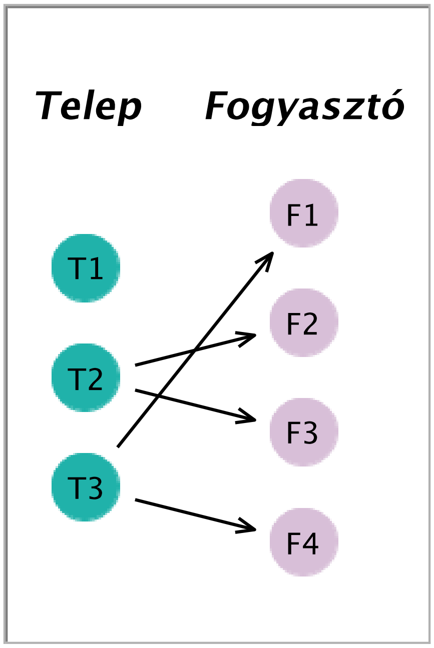
	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	2	45	45
T2	3	40 2	10 1	9	-	50	0
T3	5	9	4	40 3	1	65	25
Diff	2	-	1	-			
Igény	40	40	40	40		Költség	210
Száll.	0	40	10	40			



Az els fogyasztóhoz szállítjuk a harmadik telephely megmaradó készletét (25).

	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7	8	5	6	2	45	45
T2	3	40 2	10 1	9	-	50	0
T3	25 5	9	4	40 3	-	65	0
Diff	-	-	-	-			
Igény	40	40	40	40			
Száll.	25	40	10	40			

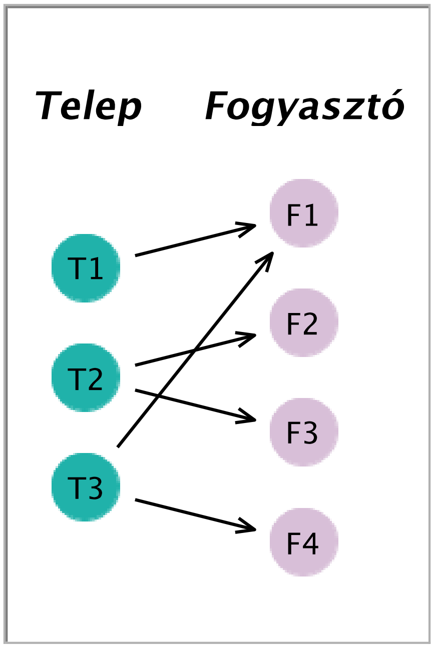
Költség	335



Befejezésként az els telephely készletét az els és harmadik fogyasztó között felosztjuk.

	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	7 / 15	8	5	6	-	45	30
T2	3	2 / 40	1 / 10	9	-	50	0
T3	5 / 25	9	4	3 / 40	-	65	0
Diff	-	-	-	-			
Igény	40	40	40	40			
Száll.	40	40	10	40			

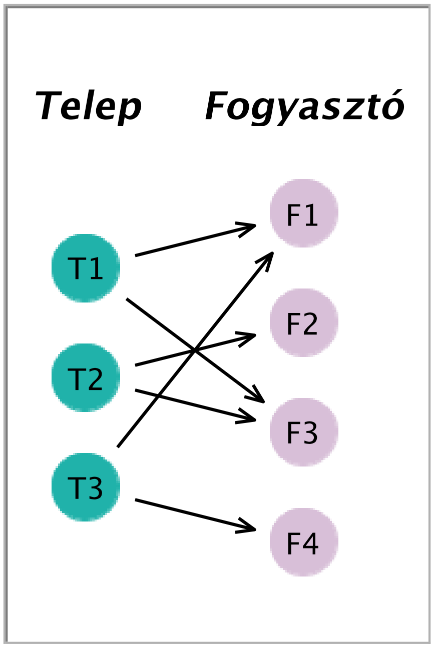
Költség	440



A "Vogel-Korda" módszer által elállított lehetséges bázismegoldást láthatjuk a következ táblázatban.

A bázismegoldáshoz tartozó szállítási összköltség:
$z = 2\cdot 40 + 3\cdot 40 + 1\cdot 10 + 5\cdot 25 + 7\cdot 25 + 5\cdot 30 = 590$. Annak ellenére, hogy a Vogel-Korda módszerrel látványos költségcsökkentést értünk el, ez nem jelenti azt, hogy minden feladat esetében ilyen sikeresen járunk el. Abban sem lehetünk biztosak, hogy ez az optimális megoldás, vagyis nincs alacsonyabb költség szállítási terv.

	F1	F2	F3	F4	Diff	Készlet	Maradék
T1	15 7	8	30 5	6	-	45	0
T2	3	40 2	10 1	9	-	50	0
T3	25 5	9	4	40 3	-	65	0
Diff	-	-	-	-			
Igény	40	40	40	40		Költség	590
Száll.	40	40	40	40			



A szállítási feladat optimális megoldásának meghatározása

A szállítási feladat egy megengedett megoldásáról a lineáris programozási feladathoz hasonlóan a dualitási tétel segítségével határozhatjuk meg, hogy optimális-e. A primál feladat megoldása akkor optimális, ha az egyidejleg leolvasható duálváltozók értékei a duálfeladat megengedett megoldását adják.
A szállítási feladat speciális megfogalmazása miatt, egy megengedett megoldás meghatározásának módja közvetlenül nem szolgáltatja a duálváltozók értékeit.
A fejezet elején megfogalmaztuk a szállítási feladathoz tartozó primál- és duálfeladatot. Ha a duálváltozók értékei ismertek lennének, behelyettesítve ket a duálfeladat feltételrendszerébe, amennyiben minden feltételt kielégítenek, akkor kijelenthetjük, hogy a primálfeladat megoldása optimális.
A duálváltozók ismert értéke nélkül is adódik lehetségünk az optimalitás ellenrzésére.

Tekintsük a kötött helyekhez tartozó x_{ij} primál változókat. A megfelel u_i , és v_j duálváltozók a duálfeladat feltételrendszerében a megfelel feltételt egyenlség szinten teljesítik.

n+m-1 kötött hely esetén az n+m darab duálváltozóhoz n+m-1 számú egyenlettel rendelkezünk, melyek alakja

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Egy változó önkényesen 0-nak választhatunk, a többi értéke kiszámítható. A kiszámított értékeket felhasználjuk arra, hogy a duálfeladat feltételrendszerének teljesülését megvizsgáljuk.

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Ha teljesül minden további feltételre, akkor a szállítási feladat megoldás optimális.

A gyakorlatban $u_i + v_j \leq c_{ij}$ teljesülése helyett az ezzel egyenérték $0 \leq c_{ij} - (u_i + v_j)$ egyenltlenség teljesülését vizsgáljuk az összes nem kötött hely esetében. Ha $c_{ij} - (u_i + v_j)$ negatív legalább egy esetben, akkor a megoldásunk nem optimális és javított bázismegoldást kell keresnünk.
A fent ismertett eljárásban a duálváltozók (u_i , és v_j) szokásos megnevezése potenciál, az optimalitás ellenrzése a potenciálok módszere.
Alkalmazzuk a potenciálok módszerét az induló feladatunkra. Ellenőrizzük,hogy az „Északnyugati sarok" módszerrel kapott bázismegoldás optimális-e.

A kötött helyek segítségével meghatározzuk a potenciálok (duálváltozók) értékét. A kötött viszonylatok esetében a költség nagysága megegyezik a két potenciál összegével.

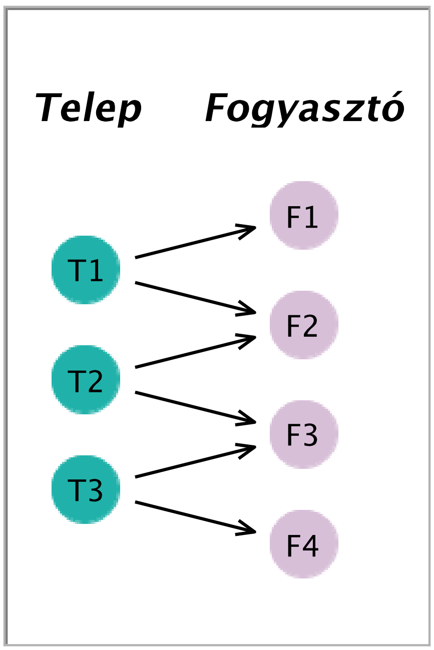
$$u_1 + v_1 = 7$$
$$u_1 + v_2 = 8$$
$$u_2 + v_2 = 2$$
$$u_2 + v_3 = 1$$
$$u_3 + v_3 = 4$$
$$u_3 + v_3 = 3$$

u_1 értékét induláskor nullának választjuk. Majd a többi potenciál értékét is meghatározzuk.

$$v_1 = 7$$
$$v_2 = 8$$
$$u_2 = -6$$
$$v_3 = 7$$
$$u_3 = -3$$
$$v_4 = 6$$

A potenciálok meghatározása után a szabad helyekrl eldöntjük, hogy szükséges-e a megoldás javítása érdekében valamelyiket bevonni a bázisba. A szabad helyek költségadatából le kell vonni a két potenciál összegét.
pl.: a második telephely – első fogyasztó esetében a számítás: 3-(-6+7)=2 értéket ad. Hasonlóan a többi szabad hely esetében is elvégezzük a számolást, az eredményt a következ táblázatban találhatjuk:

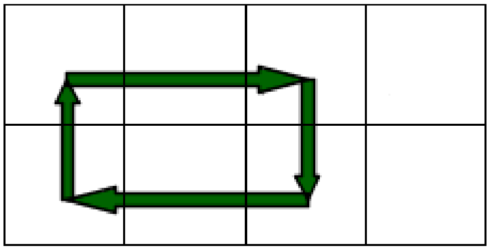
	F1 $v_1=7$	F2 $v_2=8$	F3 $v_3=7$	F4 $v_4=6$	Készlet	Maradék
T1 $u_1=0$	40 7	5 8	-2 5	0 6	45	0
T2 $u_2=-6$	2 3	35 2	15 1	9 9	50	0
T3 $u_3=-3$	1 5	4 9	25 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	625
Száll.	40	40	40	40		



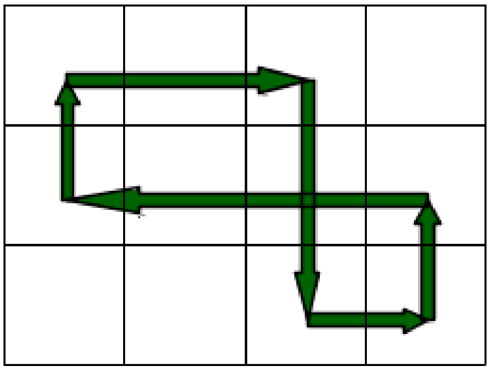
A negatív számítási eredmény egy szabad helyen azt jelenti, hogy be kell vonni a szállítási feladat megoldásába. A javításhoz választunk egy, a viszonylatokból képzett hurkot. A hurok csúcspontjain elhelyezkedő viszonylatok között egy megfelelen megválasztott értékkel változtatjuk a szállított mennyiségeket.

A hurok fogalma, megoldás javítása

Válasszuk ki a költségmátrix elemei közül azt a szabad helyet, melyre a $c_{ij} - \left(u_i + v_j\right) \leq 0$ érték minimális. Olyan hurkot alkossunk, melyben ez a viszonylat szerepel, a hurok további csúcspontjait pedig kötött helyek alkotják. A viszonylatokból zárt hurkot a következ ábrák szerint képezhetünk:

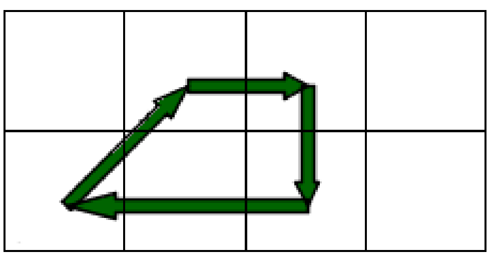


, vagy,

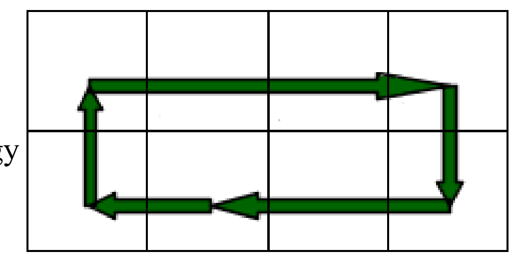


.

De nem tekinthetjük javításhoz vezet huroknak a következ ábrák szerinti viszonylat-sorozatokat:



vagy



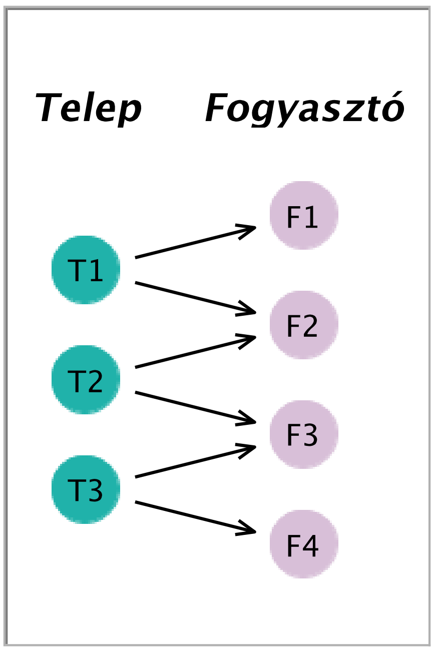
.

A megrajzolt hurok mentén haladva meghatározzuk a kötött helyekre programozott mennyiségek minimumát. A következ ábrán feltüntetett hurok esetében tehát:

T_1F_2: 5
T_2F_3: 15
T_2F_1: 35

A minimum értéke 5. Ezzel az értékkel lehet növelni illetve csökkenteni a hurokhoz tartozó viszonylatokban a szállított mennyiségeket.

	F1 $v_1=7$	F2 $v_2=8$	F3 $v_3=7$	F4 $v_4=6$	Készlet	Maradék
T1 $u_1=0$	40 7	5 8	-2 5	0 6	45	0
T2 $u_2=-6$	2 3	35 2	15 1	9 9	50	0
T3 $u_3=-3$	1 5	4 9	25 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	625
Száll.	40	40	40	40		



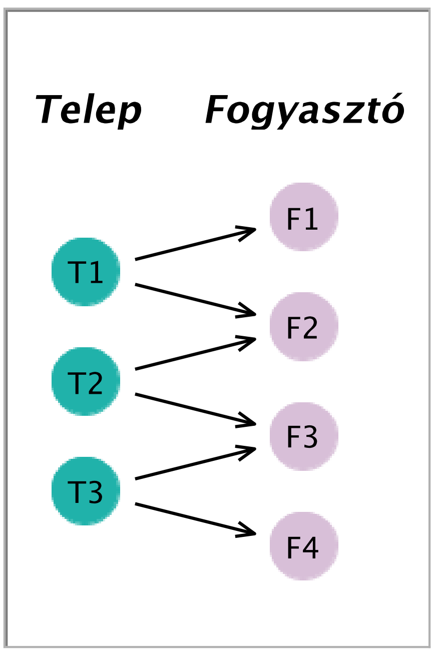
Javítsuk tehát az elzekben kapott megoldást a hurok felhasználásával.
T_1-rl F_2-höz a szállítás 8 egységbe kerül, F_3-hoz csak 5 egységbe. T_2 telephely F_3-hoz 1, F_2-höz 2 egységért szállít. Úgy módosítjuk a szállítási tervet, hogy T_1 szállítson inkább F_3-hoz 5 egységnyi árut, T_2 szállítson F_2-höz ugyanennyivel többet. Ugyan T_2 szállítási költsége növekszik, de T_3 költsége nagyobb mértékben csökken, vállalati szinten az összköltség csökken.

T_1F_2 viszonylatban 5 helyett 0 (-5)
T_1F_3 viszonylatban 0 helyett 5 (+5)
T_2F_3 viszonylatban 15 helyett 10 (-5)
T_2F_2 viszonylatban 35 helyett 40 (+5)

$7 \cdot 40 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 40 = 615$

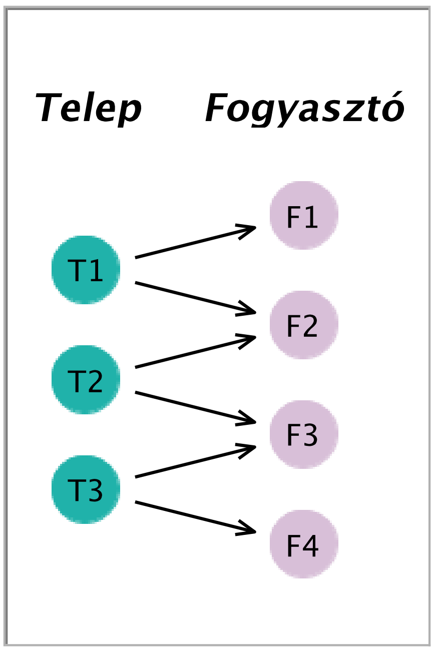
A fenti megoldás optimalitását a potenciálok ismételt meghatározásával ellenrizzük.

	F1 $v_1=7$	F2 $v_2=6$	F3 $v_3=5$	F4 $v_4=4$	Készlet	Maradék
T1 $u_1=0$	40 7	2 8	5 5	2 6	45	0
T2 $u_2=-4$	0 3	40 2	10 1	9 9	50	0
T3 $u_3=-1$	-1 5	4 9	25 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	615
Száll.	40	40	40	40		



A számítás a szabad helyek ellenrzésével folytatjuk. A megoldás nem optimális, T_3F_1 viszonylatot be kell vonni a szállítási tervbe.

	F1	F2	F3	F4		
	$v_1=7$	$v_2=6$	$v_3=5$	$v_4=4$	Készlet	Maradék
T1 $u_1=0$	40 7	2 8	5 5	2 6	45	0
T2 $u_2=-4$	0 3	40 2	10 1	9 9	50	0
T3 $u_3=-1$	-1 5	4 9	25 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	615
Száll.	40	40	40	40		



T_1F_1 viszonylatban 40 helyett 15 (-25)
T_1F_3 viszonylatban 5 helyett 30 (+25)
T_3F_3 viszonylatban 25 helyett 0 (-25)
T_3F_1 viszonylatban 0 helyett 25 (+25)

$7\cdot 15 + 5\cdot 30 + 2\cdot 40 + 1\cdot 10 + 5\cdot 25 + 3\cdot 40 = 590.$

Jelentsen csökkent az összes szállítási költség. A Vogel-Korda megoldás költségszintjét értük el. A megoldás azzal egyezik meg.

Az optimalitás ellenrzése következik. A potenciálok meghatározása után a szabad helyek megoldásba vonhatóságát ellenrizzük. Mint a következ táblázatból kitnik a

$$c_{ij} - (u_i + v_j)$$

kifejezés értéke minden szabad hely esetében nem negatív. A fenti megoldásunk tehát optimális.

	F1	F2	F3	F4		
	$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 5$	Készlet	Maradék
T1 $u_1 = 0$	15 7	2 8	30 5	1 6	45	0
T2 $u_2 = -4$	0 3	40 2	10 1	8 9	50	0
T3 $u_3 = -2$	25 5	5 9	1 4	40 3	65	0
Igény	40	40	40	40	Költség	590
Száll.	40	40	40	40